DRGANIA MECHANICZNE

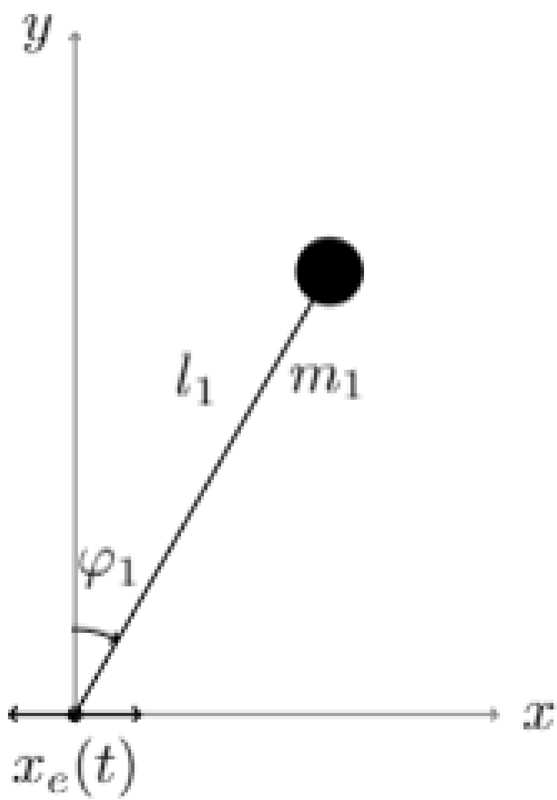
NIETŁUMIONE UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Kinematically Excited Inverted Pendulum z 1 St.S.

3 lutego 2024

Schemat systemu

Ilustracja przedstawia schemat rzeczywistego obiektu mechanicznego, wyznaczony na podstawie uprzedniej analizy rzeczywistego obiektu.



Analizując przedstawiony układ można stwierdzić, że jego liczba stopni swobody to 1.

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna układu wyrażona jest wzorem:

$$T = \frac{m\left(-l\cos\left(\varphi\right)\dot{\varphi} - \dot{x}_e\right)^2}{2} + \frac{l^2 m\sin^2\left(\varphi\right)\dot{\varphi}^2}{2} \tag{1}$$

Wyznaczona wielkość określa energię układu wynikającą z jego własności inercyjnych (energię zmagazynowaną w elementach bezwładnych).

Energia potencjalna

Energia potencjalna układu wyrażona jest wzorem:

$$V = -glm\cos\left(\varphi\right) \tag{2}$$

Zaprezentowana zależność opisuje oddziaływanie potencjalnych pól sił w których znajduje się obiekt.

Lagrangian układu (Funkcja Lagrange'a)

Lagrangian układu dany jest następującym wyrażeniem (3):

$$L = \frac{m\dot{x}_e^2}{2} + glm\cos{(\varphi)} + \frac{l^2m\cos^2{(\varphi)}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{l^2m\sin^2{(\varphi)}\dot{\varphi}^2}{2} + lm\cos{(\varphi)}\dot{\varphi}\dot{x}_e \tag{3}$$

Równania Eulera Lagrange'a dla rozważanego przypadku są następujące:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}^{N} \tag{4}$$

Kolejne pochodne wynikające z zastosowania równań Eulera-Lagrange'a są nastęujące:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -glm\sin{(\varphi)} - lm\sin{(\varphi)}\dot{\varphi}\dot{x}_e \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = lm\cos{(\varphi)}\dot{x}_e + l^2m\cos^2{(\varphi)}\dot{\varphi} + l^2m\sin^2{(\varphi)}\dot{\varphi} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = lm\cos{(\varphi)}\ddot{x}_e + l^2m\cos^2{(\varphi)}\ddot{\varphi} + l^2m\sin^2{(\varphi)}\ddot{\varphi} - lm\sin{(\varphi)}\dot{\varphi}\dot{x}_e \tag{7}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \tag{8}$$

Wyniki przedstawionych operacji wykorzystuje się wyznaczenia równań ruchu układu.

Równanie ruchu

Wykorzystując obliczone pochodne, wyznacza się równanie ruchu na podstawie odpowiedniego wzoru. Równanie ruchu układu przedstawia zależność: (9)

$$l^2m\ddot{\varphi} + glm\sin{(\varphi)} + lm\cos{(\varphi)}\ddot{x}_e = 0 \tag{9}$$

Wyznaczone równania stanowią matematyczny opis dynamiczny właściwości układu. Dalsza analiza pozwala na skuteczną analizę działania modelowanego obiektu i określenie jego parametrów mechanicznych.

Linearyzacja równań ruchu

Linearyzaja równań polega na znalezieniu ich rozwinięcia w szereg Taylora względem współrzędnych, prędkości i przyspieszeń uogólnionych w otoczeniu punktu równowagi. Celem uproszczenia wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{10}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\varphi(t) \tag{11}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) \tag{12}$$

Punkty równowagi rozważanego układu są następujące:

$$\varphi = 0 \tag{13}$$

$$\dot{\varphi} = 0 \tag{14}$$

$$\ddot{\varphi} = 0 \tag{15}$$

Równanie ruchu dla współrzędnej $\varphi(t)$ można przestawić jako:Formalnie należy obliczyć pochodne cząstkowe wielkości uogólnionych ze składników równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)\left.\frac{d}{d\frac{d}{dt}\varphi(t)}RR_{\varphi}(t)\right|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} + \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\left.\frac{d}{d\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)}RR_{\varphi}(t)\right|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} + \varphi(t)\left.\frac{d}{d\varphi(t)}RR_{\varphi}(t)\right|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} + RR_{\varphi}(t)\Big|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} = 0 \tag{16}$$

Poszczególne pochodne mają następującą postać:

$$RR_{\varphi}(t)\Big|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} = lm\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{x_e}(t) \tag{17}$$

$$\left.\frac{d}{d\varphi(t)}RR_{\varphi}(t)\right|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} = glm \tag{18}$$

$$\left.\frac{d}{d\frac{d}{dt}\varphi(t)}RR_{\varphi}(t)\right|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} = 0 \tag{19}$$

$$\left.\frac{d}{d\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)}RR_{\varphi}(t)\right|_{\substack{\varphi(t)=0\\ \frac{d}{dt}\varphi(t)=0\\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)=0}} = l^2m \tag{20}$$

Po podstawieniu obliczonych pochodnych, otrzumuje się następujące zlinearyzowane równanie:

$$lm\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{x_e}(t) + l^2m\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + glm\varphi(t) = 0 \tag{21}$$

Wyznaczanie macierzy fundamentalnej

Z równań ruchu wyznaczono macierz mas i sztywności układu::

$$M = \left[l^2m\right] \tag{22}$$

$$K = \left[glm\right] \tag{23}$$

Macierz fundamentalna, na podstawie której wyznaczono równanie charakterystyczne rozważanego układu Δ, przedstawiają się następująco::

$$A = \left[glm - l^2 m\omega^2 \right] \tag{24}$$

$$\Delta = glm - l^2 m\omega^2 \tag{25}$$

Macierz fundamentalna pozwala określić rozwiązanie ustalone. Natomiast bazując na równaniu charakterystycznym określa się częstości własne układu.

Rozwiązanie ogólne

Rozwiązanie ogólne przedstawia wyrażenie:

$$X_{g-\varphi(t)} = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{l}}\right) \tag{26}$$

Rozwiązanie ogólne opisuje ruch analizowanego układu (przedstawia przemieszczenie w funkcji czasu) i wynika z rozważań dotyczących drgań swobodnych układu.

Rozwiązanie szczególne

Rozwiązanie szczególne dane jest następującym wyrażeniem:

$$X_{s-\varphi(t)} = -\frac{\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{x_e}(t)}{g} \tag{27}$$

Rozwiązanie szczególne układu przedstawia zależność położenia od czas odpowiednią dla drgań wymuszonych